

III. Exponentialfunktion zur Basis e („die Exponentialfunktion“) und Logarithmus

Wir wissen (Satz 8.2 und 8.3 sowie $e \in [2, 4]$)

- $x \mapsto e^x$ streng wachsend
- $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$
- Lipschitz-Stetigkeit von $x \mapsto e^x$ auf Intervallen $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Satz 8.1 $\Rightarrow \boxed{\{e^x : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+}$

($\mathbb{R}$ wird also bijektiv auf $\mathbb{R}^+$ abgebildet)

Insgesamt gilt

-261-

Satz 8.4: Die Funktion

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exp(x) := e^x,$$

erfüllt

(1) Funktionalgleichung: $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$

mit $\exp(0) = 1$

~~(Aber in der Vorlesung "exp" als Eindeutigkeitssatz)~~

(2) $1+x \leq \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(3) $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall x < 1$

(4) $\exp$ wächst streng

(5) $\exp$ Lipschitz auf $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$

(6) $\exp$ bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^+$ ab

Beweis: (1), (4), (6): ✓

(5): man schaue, wie sich „L“ im
Hilfssatz entwickelt;

(2): $1 + x \leq e^x$ klar für $x \leq -1$,
da $e^x > 0$.

Sei $x \geq -1 \implies$
Bernoulli

$$1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nun zeige (Übung):

$\forall y \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{k}\right)^k = e^y$$



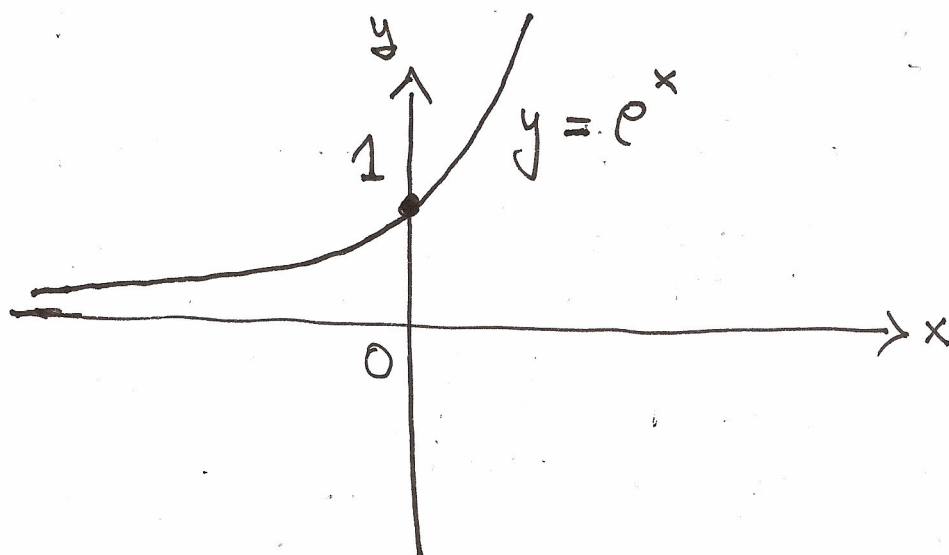
Damit folgt (2).

↑ Skript p. 112

(3) Sei $x < 1$. Nach (2) ist

$$\exp(-x) \geq 1 + (-x) \iff$$

$$e^{-x} \geq 1 - x \iff e^x \leq \frac{1}{1-x}$$



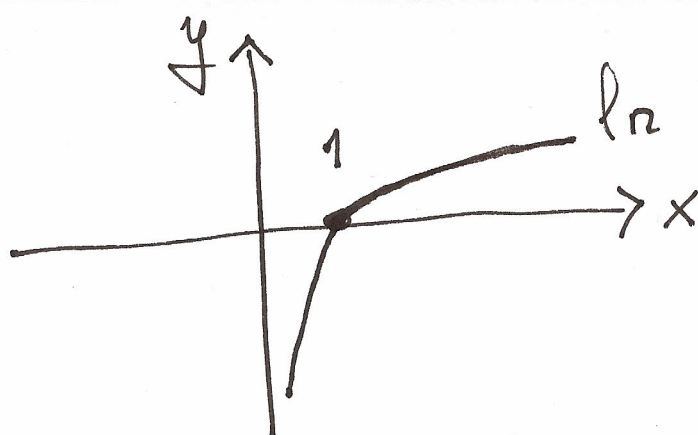
Def. 8.3 : Die Umkehrfunktion

$$\exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

zur Exponentialfunktion $\exp$ heißt
natürlicher Logarithmus / Logarithmus
 zur Basis e

Notation :

$$\ln \text{ oder } \log : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$



Aus Satz 8.4 + Def. von $\ln$ folgt

Satz 8.5 : (Eigenschaften von $\ln$)

(1) (Funktionalgleichung) $\leftarrow$ "Rechenschieber"

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad x, y > 0,$$

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$$

(2) (Abschätzungen)

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1, \quad x > 0$$

(3) $\ln$ wächst streng

(4) $\ln$ ist Lipschitz auf

$$[a, \infty), \quad a > 0.$$

Beweis : (1) $e^{\ln(x \cdot y)} = x \cdot y =$

$$e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} \stackrel{=}{=} e^{\ln x + \ln y}$$

Funktionalgl.
für exp

Injektivität von $y \mapsto e^y \Rightarrow \ln(xy) = \dots$
(3) klar

(2) Satz 8.4, (2) $\Rightarrow$

$$1 + \ln x \leq \exp(\ln x) \Rightarrow \ln x \leq x - 1;$$

beachte: $1 - \frac{1}{x} \in (-\infty, 1)$ für $x > 0$

Satz 8.4
 $\Rightarrow$
 (3) $\exp\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{x})} = x$

$$\Rightarrow \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \ln x ;$$

! (4) Lipschitz Bdg. auf $[a, \infty)$, $a > 0$: -266-

Seien $x < y$ aus $[a, \infty) \Rightarrow$

$$0 \leq \ln y - \ln x = \ln\left(\frac{y}{x}\right) \stackrel{(2)}{\leq}$$

$$\cancel{\frac{y}{x} - 1} \quad \frac{y}{x} - 1 = \frac{y-x}{x}$$

$$\leq \frac{1}{a} (y-x)$$

$\Rightarrow \frac{1}{a}$ Lipschitz Konstante auf $[a, \infty)$
 $\square$

Wir notieren noch folgende Darstellung von e^x :

Satz 8.6 :
$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Beweis:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

-267-

war „Übung“;

Skript p. 112

$$\text{Sei } f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad \left(\text{Konvergenzradius } \infty \right)$$

Zeige: $f(x) = e^x$ (*)

Man hat:

$$(1.) \quad f(x+y) = f(x) f(y) \quad \boxed{\text{Cauchy Produkt}}$$

$$(2.) \quad f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \quad (\text{„Übung“})$$

Wir behaupten: (3) $f(x) = f(1)^x$,

mit (2) folgt dann (*).

ad (3): Sei $n \in \mathbb{N} \implies$

$$f(n) = f(\underbrace{1 + \dots + 1}_{(1)}) = f(1)^n$$

außerdem:

$$e \stackrel{(2)}{=} f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$\stackrel{(1)}{=} f\left(\frac{1}{n}\right)^n \implies f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$$

und somit ($m \in \mathbb{N}$)

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m\text{-fach}}\right) \stackrel{(1)}{=}$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)^m = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m = e^{\frac{m}{n}}$$

Wegen $1 = f(0) = f(x-x) \stackrel{(1)}{=}$

$$f(x) f(-x) \iff \boxed{f(-x) = \frac{1}{f(x)}}$$

ist gezeigt:

$$\boxed{f(x) = e^x}$$

$$\underline{x \in \mathbb{Q}}$$

einfache Überlegung:

$$\begin{cases} h_1, h_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lipschitz,} \\ h_1 = h_2 \text{ auf } \mathbb{Q} \cap [a, b] \implies h_1 = h_2 \end{cases}$$

Wir wissen: φ und $x \mapsto e^x$ sind Lipschitz auf allen Intervallen $[a, b]$

Es folgt (3). □

Nachtrag: Logarithmen zur Basis $a > 0$

$$x \in \mathbb{R}: a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x} \quad (*)$$

Daraus liest man ab:

$$\begin{aligned} a \neq 1 &\implies x \mapsto a^x \text{ ist} \\ \text{Bijektion } \mathbb{R} &\longrightarrow (0, \infty) \end{aligned}$$

Umkehrfunktion :

-270-



$$\text{Logarithmus zur Basis } a,$$
$$\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a > 0,$$
$$a \neq 1$$

Zusammenhang mit $\ln$:

nach Def. der Umkehrfunktion

$$a^{\log_a x} = x = e^{\ln x} \quad \text{und}$$
$$a^{\log_a x} \stackrel{(*)}{=} e^{(\ln a) \log_a x}$$

$$\Rightarrow \ln x = (\ln a) \log_a x \Rightarrow$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

III . Exponentialfunktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ -271-

Def 8.4 : $\left\{ \begin{array}{l} \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \\ z \in \mathbb{C}. \end{array} \right\}$

Bem : 1.) Konvergenzradius $\infty \Rightarrow$
Wohldefiniertheit für alle $z \in \mathbb{C}$

2.) wie im Reellen gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$$

(Referenz: Kabblo, Analysis I, p. 284)

3) $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \exp z = e^z$

Notation : $e^z := \exp(z)$ auch für $z \in \mathbb{C}$

$$4) \boxed{\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}}, z \in \mathbb{C}$$

$$\left(\text{da } \overline{e^z} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\overline{z})^k \right)$$

$$\boxed{\text{Satz 8.7}}: a) \boxed{e^{z+w} = e^z \cdot e^w}, z, w \in \mathbb{C}$$

$$b) \boxed{|e^z| > 0} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$c) \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{z_n} - 1}{z_n} = 1}$$

für jede Folge $z_n \rightarrow 0, z_n \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Beweis: a) Cauchy Produkt ∇

b) Mit $z = x + iy$ ist nach a)

$$e^z = e^x e^{iy} \Rightarrow |e^z| =$$

$$e^x |e^{iy}|. \quad \text{Es gilt:}$$

$$1 = e^0 = e^{iy - iy} = e^{iy} \overline{(e^{iy})} \\ = |e^{iy}|^2 \Rightarrow |e^{iy}| = 1 \quad \nabla$$

Insgesamt: $|e^z| = e^x > 0.$

c) Für $z \neq 0$ ist $\frac{e^z - 1}{z} =$

$$\frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \Rightarrow$$

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-1} \right|$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} |z|^{k-1} = |z| \sum_{k=2}^{\infty} |z|^{k-2}$$

$$= |z| \frac{1}{1-|z|}, \quad \text{falls } |z| < 1 \quad \square$$

Notation:

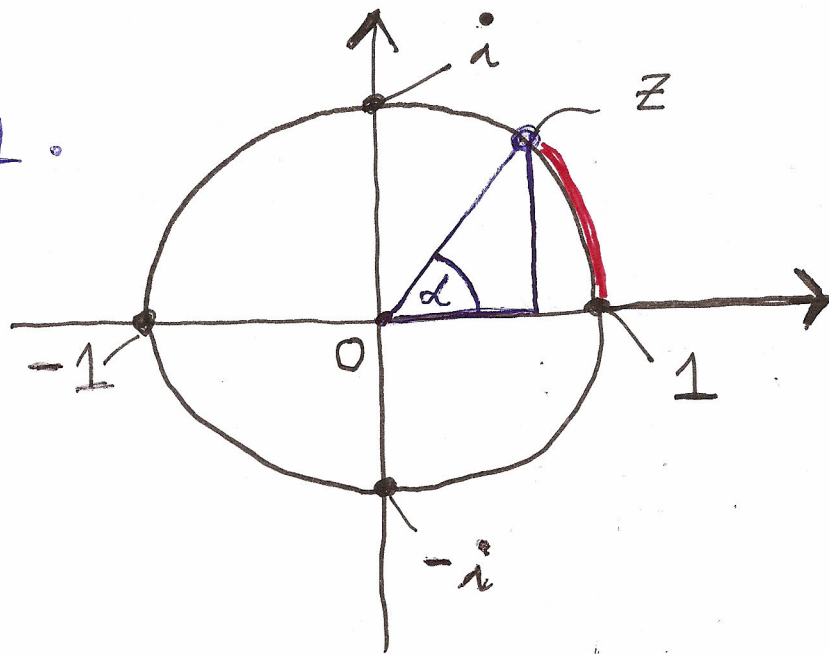
$a > 0, z \in \mathbb{C}$
wegen $a = e^{\ln a}$ setzt man:

$$z \cdot \ln a \\ a := e^z$$

-274-

IV. Winkelfunktionen (= trigono- metrische Funktionen), π

Sei $z \in \mathbb{C}$
mit $|z| = 1$.



„Winkel α “ entspricht ^{der} $\checkmark$ Länge des
Kreisbogens von 1 nach z ;

mit $z = (x, y) = x + iy$ gilt
„

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha ;$$

die Funktion

$$\alpha \mapsto \cos \alpha + i \sin \alpha$$

beschreibt eine Drehbewegung
auf der Einheitskreislinie

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \};$$

für $\alpha = 0$ startet man in 1 ,

für „ $\alpha = 90^\circ$ “ ist i erreicht;

Bedeutung von 90° :

$$\underline{90^\circ} \hat{=} \frac{1}{4} \cdot \text{Länge der 1-Kreis-} \\ \text{linie}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

andere gesagt: wir definieren $\frac{\pi}{2}$

gleich als die Zahl, für die
 unsere "Drehung" zum ersten Mal
 // den Wert i annimmt ! ∇

Wie sieht die gewünschte Drehabbildung
 $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ nun aus?

Def. 8.5 : a) Es sei

$$\text{cis} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{cis}(x) := e^{ix}$$

b) Man setzt

$$\begin{cases} \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & \cos x := \operatorname{Re}(\text{cis}(x)) \\ \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & \sin x := \operatorname{Im}(\text{cis}(x)) \end{cases}$$

Also :

$$\text{cis}(x) = \underline{\underline{\cos x}} + \underline{\underline{i}} \underline{\underline{\sin x}}$$

Jetzt sind alle gewünschten Eigenschaften zu beweisen $\nabla \nabla$!

Satz 8.8 :

$$1.) \quad |\text{cis } x| \equiv 1, \quad (\cos x)^2 + (\sin x)^2 \equiv 1$$

(cis hat also Werte in S^1)

2.) Reihenentwicklung :

$$\text{cis}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} i^k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k x^{2k} + \dots$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= \cos x}$

-278-

$$i \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sin x$$

speziell:
$$\begin{cases} \cos = \text{gerade Funktion} \\ \quad (\cos(-x) = \cos(x)) \\ \sin = \text{ungerade Funktion} \end{cases}$$

(Beweis: Definition von e^{ix} !)

3.) Funktionalgleichung:

$$\boxed{\operatorname{cis}(x+y) = \operatorname{cis}(x) \cdot \operatorname{cis}(y)}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x \end{cases}$$

(Beweis: $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$!)

4.) Lipschitz Bedingung :

$$|\operatorname{cis} x - \operatorname{cis} y| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\cos x - \cos y| \leq |x - y| \\ |\sin x - \sin y| \leq |x - y| \end{array} \right.$$

-||-

5.) // Surjektivität :

$$\operatorname{cis}(\pi) = S^1$$

Beweis: 1) - 3) ✓

4) Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{cis}(x+y) - \operatorname{cis}(x-y) =$$

$$e^{ix} \{ e^{iy} - e^{-iy} \} = \operatorname{cis} x \cdot \{ \dots \}$$